

MECÁNICA RACIONAL

PRIMERA PARTE

DEL PUNTO MATERIAL

CAPÍTULO PRIMERO

PRINCIPIOS I DEFINICIONES DE LA MECÁNICA

La teoría del movimiento de los cuerpos descansa sobre algunos principios sencillos, deducidos de la observacion. Estos principios nos parecen hoi dia casi evidentes porque estamos familiarizados con ellos; sin embargo, largos siglos han pasado sin que nadie hubiera pensado en ellos, i solo hombres de jenio, como Galileo, Kepler i Newton, han sabido despejarlos entre los fenómenos tan complejos del movimiento.

Estos principios no se pueden demostrar directamente por la esperiencia; se averigua solo que sus consecuencias racionales estan siempre de acuerdo con la observacion, i una de las pruebas mas concluyentes de su exactitud es la concordancia rigu-

rosa de los movimientos de los cuerpos celestes con las leyes deducidas de la mecánica.

PRINCIPIO DE LA INERCIA. (Kepler)

Cuando un cuerpo se mueve libremente en el espacio, se observa, desde luego, un movimiento de *conjunto* que tiene una forma jeométrica bien neta i, al mismo tiempo, una especie de rotacion, mas o ménos compleja, del cuerpo sobre sí mismo; sin embargo, este último movimiento, cualquiera que sea su complicacion, no parece influir en nada sobre el movimiento de conjunto.

Esto se observa indistintamente en los cuerpos *vivos* o *muertos.*

En la superficie de la tierra, ningun cuerpo puede moverse libremente sin estar sometido a la accion de la pesantez. Para eliminar esta accion se puede, a la verdad, obligar el cuerpo a moverse sobre un plano horizontal, como una bola de billar, por ejemplo; pero el roce inevitable del cuerpo con el plano altera el movimiento de aquel cuerpo hasta destruirlo completamente. Es una nueva accion sustituida a la primera. Sin embargo, esta nueva accion puede modificarse, i se observa que, miéntras mas disminuye el roce, mas tiempo tambien conserva el cuerpo un movimiento de conjunto recto i uniforme.

Esto permite inducir que, en el límite, cuando ninguna *accion esterior* obra sobre un cuerpo móvil, éste conserva indefinidamente un movimiento de *conjunto* recto i uniforme.

La consideracion de *acciones esteriores* se impone desde un principio, pues se observa constantemente que los cuerpos vivos, abandonados libremente en el espacio, no pueden, por sí mismo, influir sobre su movimiento de conjunto, a pesar de las acciones musculares que pueden desarrollar; éstas se llaman entónces *acciones interiores.*

El movimiento de conjunto se podrá estudiar, sin tomar en cuenta las dimensiones del cuerpo, si estas dimensiones son infinitamente pequeñas respecto al cambio de lugar del cuerpo en el espacio. Se concibe así la necesidad de considerar, en primer lugar, *cuerpos móviles cuyas dimensiones son infinitamente*

pequeñas respecto a su cambio de lugar en el espacio; éstos se llaman *puntos materiales.*

Para formarse una idea clara de lo que es un punto material, se puede suponer que un observador mira un cuerpo cualquiera desde una distancia que aumenta indefinidamente. El cuerpo toma entónces, para el observador, el aspecto de un punto material. El límite hácia el cual tiende la forma del cuerpo, cuando la distancia del observador tiende hácia el infinito es un punto jeométrico perfectamente determinado; lo llamaremos el *centro del punto material.*

Las estrellas, por ejemplo, nos dan la impresion de verdaderos *puntos materiales.*

Segun estas esplicaciones, el movimiento de conjunto de un punto material será el de su centro, es decir, el movimiento de un punto jeométrico bien definido, i el principio de la inercia se debe enunciar de la manera siguiente:

Cuando un punto material móvil es abandouado a sí mismo, sin que ningnna accion esterior obre sobre él, su CENTRO *conserva indefinidamente un movimiento recto i uniforme; i, por consiguiente, cuando un punto material está en el reposo, su centro queda indefinidameute inmóvil, si ninguna accion esterior obra sobre el punto.*

Es importante observar que el principio de la inercia se refiere solo al estado de movimiento o de reposo del *centro* de un punto material i no al movimiento del punto al rededor de su centro. Este principio no se opone a que un punto material, en el reposo absoluto, tome espontáneamente un movimiento de rotacion al rededor de su centro inmóvil sin que intervengan acciones esteriores. Se demostrará, efectivamente, mas adelante, que este movimiento espontáneo de rotacion es posible cuando el punto material es *vivo.*

Para abreviar el lenguaje i conformarnos al uso, diremos simplemente en lo sucesivo: *movimiento de un punto material* en lugar de *movimiento del centro de un punto material.*

DE LA IMPULSION

Se llama *impulsion* la causa que modifica el movimiento de un cuerpo o que pone en movimiento un cuerpo en reposo: una

piedra lanzada con la mano recibe de la mano una impulsion; un cuerpo, chocado por otro, recibe de este último una impulsion; una impulsion es la que da su velocidad inicial al proyectil de una arma de fuego; por fin, es la impulsion continua de la pesantez la que hace caer los cuerpos a la superficie de la tierra.

La impulsion no es un fenómeno instantáneo: obra constantemente en el caso de la pesantez; durante un tiempo limitado, en el caso de la mano que lanza una piedra; en fin, durante un tiempo mui pequeño, en caso de un choque o de una esplosion. Cualquiera que sea su duracion, se debe lójicamente admitir que la impulsion es una funcion continua del tiempo como los demas fenómenos naturales.

Cuando se trata de un punto material, se puede decir que la impulsion da cierta *velocidad* a un punto en reposo o bien modifica la *velocidad* de un punto en movimiento. En efecto, consideremos el caso jeneral de un punto en movimiento: siempre que ninguna accion esterior obra sobre el punto, este se mueve en línea recta con una velocidad constante; si el punto recibe una impulsion, la direccion i la velocidad del movimiento cambiarán, pero, en el momento mismo en que la impulsion cesa de obrar sobre el punto, este vuelve inmediatamente a moverse en línea recta con una velocidad constante. De tal manera que, si se compara el estado dinámico del punto, ántes i despues de haber recibido la impulsion, la única diferencia consiste en una modificacion de la *velocidad.*

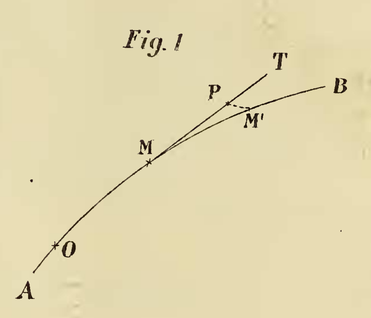
DEFINICION DE LA VELOCIDAD

Cuando el movimiento de un punto es uniforme, el camino recorrido es siempre proporcional al tiempo correspondiente, i la velocidad es, por definicion, *el camino recorrido durante la unidad de tiempo.* Se ve facilmente que la velocidad es tambien igual, en este caso, a la razon constante entre el camino recorrido i el tiempo correspondiente.

Esta definicion no se puede aplicar a un movimiento cualquiera, pues, el camino recorrido en la unidad de tiempo varia

constantemente, i la razon entre el camino recorrido i el tiempo correspondiente es tambien variable.

Sea AB (fig. 1) la curva descrita por el punto móvil; M i M' sus posiciones en los momentos t i $t+dt$. La curva AB se llama *trayectoria del punto* i los caminos recorridos se cuentan, sobre la trayectoria, desde cierto punto fijo i arbitrario O. Sean s i $s+\Delta s$ los arcos OM i OM'; como el movimiento del punto es continuo, el arco s es una funcion continua de t i, cuando dt tiende hácia cero, Δs tiende tambien hácia cero. Si el movimiento del punto estuviera uniforme, la razon $\frac{\Delta s}{dt}$ mediria precisamente su velocidad; en el caso jeneral, esta razon debe tender hácia un límite perfectamente determinado, cuando dt tiende hácia cero; este límite se toma entónces como definicion de la velocidad en el momento t.



Sea, pues, v la velocidad del punto móvil en el momento t; se tiene, por definicion:

$$v = \lim. \frac{\Delta s}{dt}$$

O bien, segun las notaciones del cálculo infinitesimal,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

En esta última fórmula, ds no es rigorosamente igual al camino Δs descrito durante el tiempo dt; pero difiere de éste solo de una cantidad infinitamente pequeña de órden superior a dt.

Sea MT la tanjente a la trayectoria en el punto M i $MP = ds$, se puede reemplazar el camino MM' que describe efectivamente

el punto móvil durante el tiempo dt, por el camino MP que describiria otro móvil, animado de un movimiento recto i uniforme de velocidad v.

El movimiento de este segundo móvil durante el tiempo dt, es lo que se llama el *movimiento elemental* del primero en el instante t.

La velocidad de cada movimiento elemental tiene una magnitud, una direccion i un sentido determinados; del mismo modo, la velocidad de un punto sobre su trayectoria es definida, a cada instante, en magnitud, direccion i sentido, i es la velocidad del movimiento elemental correspondiente.

Segun esto, la velocidad de un punto se puede representar por un *vector.*

IMPULSION ELEMENTAL I FUERZA

Sea I la *cantidad* de impulsion recibida por un punto material a cierto momento t; a otro momento $t+dt$, la cantidad de impulsion recibida será $I+\Delta I$. Como la impulsion es una funcion continua del tiempo, ΔI debe tender hácia cero cuando dt tiende hácia cero, i la razon $\frac{\Delta I}{dt}$ debe tender hácia un límite perfectamente determinado; este límite se llama *fuerza.* Así *la fuerza es a la impulsion lo que la velocidad es al camino recorrido.*

Sea F la fuerza que obra sobre un punto material, en el momento t; se tiene por definicion

$$F = \lim. \frac{\Delta I}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

La cantidad de impulsion dI se llama *impulsion elemental;* no es igual a la cantidad efectiva de impulsion ΔI que obra durante el tiempo dt, pero difiere de ésta solo de una cantidad infinitamente pequeña de órden superior a dt; se puede, pues, sustituir una a otra, lo que equivale a considerar la fuerza F como constante durante el tiempo dt.

Recíprocamente, un punto material móvil, sometido a un

momento dado, a una fuerza F, recibe, durante el tiempo dt, una impulsion $F\,dt$.

Cuando la impulsion obra sobre un punto material en el reposo, el movimiento inicial del punto tiene una direccion i un sentido determinados. Esta direccion i este sentido, son, por definicion, la direccion i el sentido de la impulsion elemental inicial.

Una impulsion cualquiera puede ser considerada como la sucesion de una infinidad de impulsiones elementales; cada una de éstas tiene tambien una direccion i un sentido determinados: son los del movimiento inicial de un punto que estuviera sometido, en el reposo, a la impulsion considerada.

La fuerza tiene, entónces, la direccion i el sentido de la impulsion elemental correspondiente.

En resúmen, la impulsion elemental i la fuerza son definidos, a cada instante, en magnitud, direccion i sentido, i pueden representarse por vectores de misma direccion i de mismo sentido.

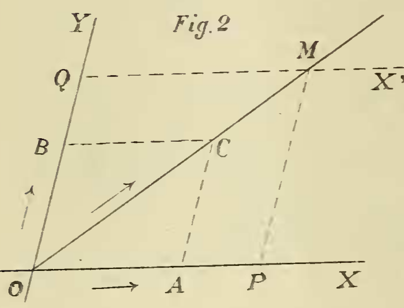
COMPOSICION DE LAS VELOCIDADES SIMULTÁNEAS

Para definir el movimiento de un punto en el espacio, se deben referir sus posiciones sucesivas a cierto *sistema de comparacion*. Si este es invariable de forma i de posicion, el movimiento así referido se llama *movimiento absoluto*. Si el sistema de comparacion es móvil, el movimiento del punto, respecto a éste sistema móvil, se llama *movimiento relativo*, i el movimiento del sistema de comparacion es el *movimiento de arrastre*.

El movimiento de arrastre mas sencillo es el de *traslacion;* en este, todos los puntos del sistema tienen, a cada instante, la misma velocidad o, mas bien dicho, el mismo *movimiento elemental*, de tal manera que basta conocer el movimiento de uno de los puntos del sistema para conocer el movimiento de todos los demas.

Consideremos, en primer lugar, el caso mas sencillo: un punto es animado de un movimiento relativo recto i uniforme, respecto a un sistema de comparacion animado tambien de un movimiento de traslacion recto i uniforme; se trata de determinar el movimiento absoluto del punto en el espacio.

Sean (fig. 2): O la posicion del punto móvil a cierto momento inicial; OA el vector que representa la velocidad relativa del punto, i OB otro vector que representa la velocidad del movimiento de arrastre.



Referimos la posicion del punto móvil al sistema formado por las rectas indefinidas OX, OY, prolongaciones de OA i OB.

En su movimiento relativo el punto móvil describe la recta OX con una velocidad constante igual a OA, luego, despues de un tiempo t, llega en cierto punto P tal que

$$OP = OA \times t$$

A medida que el punto móvil se mueve sobre OX, esta recta se traslada paralelamente a sí misma con una velocidad constante igual a OB; luego, despues del tiempo t, habrá venido en QX'; de tal manera que

$$OQ = OB \times t$$

La posicion absoluta del punto móvil será, por consiguiente, el punto M de la recta QX', tal que

$$QM = OP$$

Sean x e y las coordenadas del punto M respecto a los dos ejes fijos OX i OY; se tiene;

$$x = OP = OA \times t$$
$$y = OQ = OB \times t$$

Luego

$$\frac{y}{x}=\frac{OB}{OA}$$

Por consiguiente, el punto M, en su movimiento absoluto, se mueve sobre la recta OM, diagonal del paralelógramo construido sobre OA i OB; determinemos ahora la naturaleza de este movimiento absoluto; la figura 2 da inmediatamente

$$\frac{OM}{OC}=\frac{OP}{OA}=t$$

Luego

$$OM=OC\times t$$

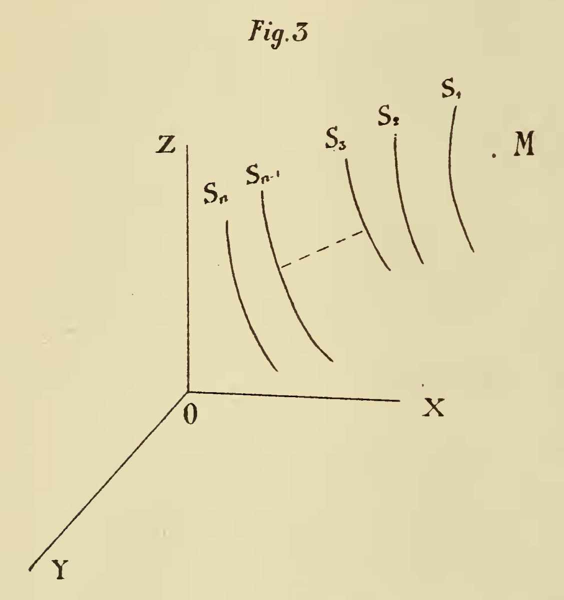
La lonjitud OC es constante e igual a la lonjitud de la diagonal del paralelógramo construido sobre OA i OB, i la fórmula obtenida demuestra que el punto M tiene un movimiento uniforme cuya velocidad es precisamente OC.

En resúmen, el movimiento absoluto del punto considerado es recto i uniforme i su velocidad es la resultante jeométrica de las velocidades de los movimientos relativo i de arrastre.

Consideremos ahora el caso de un número cualquiera de sistemas de comparacion, animados, unos respecto a otros, de traslaciones rectas i uniformes. Sea M el punto móvil, v_0 su velocidad relativa respecto a un primer sistema de comparacion S_1; v_1 la velocidad relativa de la traslacion del sistema S_1 respecto a otro sistema S_2; v_2 la velocidad relativa de la traslacion del sistema S_2 respecto a otro sistema S_3, i así en seguida; v_{n-1} la velocidad relativa de la traslacion del sistema S_{n-1} respecto al sistema S_n; en fin v_n la velocidad absoluta de la traslacion de S_n i V la velocidad absoluta del punto M en el espacio.

Sea (fig 3) $OXYZ$ un sistema de comparacion fijo en el espacio; respecto a este sistema el punto M, considerado como ligado al sistema S_n, tiene una velocidad absoluta v_n; el mismo punto M, considerado como ligado al sistema S_{n-1}, tiene una

velocidad relativa v_{n-1} respecto al sistema S_n, luego, si se adopta la notacion usual de las sumas jeométricas, la velocidad absoluta del punto M, considerado como ligado al sistema S_{n-1}, es



$$\overline{v'} = \overline{v_n} + \overline{v_{n-1}}$$

La velocidad v' es tambien la velocidad absoluta de traslacion del sistema S_{n-1}. Siguiendo el mismo raciocinio se ve que la velocidad absoluta del punto M, considerado como ligado al sistema S_{n-2}, es

$$\overline{v'} + \overline{v_{n-2}} = \overline{v_n} + \overline{v_{n-1}} + \overline{v_{n-2}}$$

Finalmente, la velocidad absoluta del punto M; considerado como ligado al sistema S_1, es

$$\overline{v_n} + \overline{v_{n-1}} + \overline{v_{n-2}} + \ldots + \overline{v_2} + \overline{v_1}$$

I, como el punto M tiene por hipótesis, una velocidad relativa v_0 respecto a S_1, su velocidad absoluta en el espacio será

$$\overline{V} = \overline{v_0} + \overline{v_1} + \overline{v_2} + \ldots + \overline{v_{n-1}} + \overline{v_n}$$

Supongamos que en un momento dado, todos los sistemas de comparacion $S_1, S_2 \ldots S_n$ esten confundidos con el sistema $OXYZ$; respecto a este último sistema el punto M parecerá animado de los $n+1$ *velocidades simultáneas* $v_0, v_1 \ldots v_n$; se-

gun la fórmula obtenida, *su velocidad resultante es la resultante jeométrica de las velocidades simultáneas componentes.*

Este resultado es jeneral i se aplica lo mismo, cuando los sistemas de comparacion son animados de movimientos cualesquiera; en efecto, en un momento t i durante el tiempo dt, el movimiento mas jeneral de un punto puede ser reemplazado por su movimiento elemental recto i uniforme. Por otra parte, cualquiera que sea el movimiento de arrastre de un sistema de comparacion, el punto ligado invariablemente a este sistema tendrá cierto movimiento i éste, durante el tiempo dt, puede considerarse tambien como recto i uniforme.

Llegamos, pues, a este teorema jeneral:

Un punto móvil, animado de un número cualquiera de velocidades simultáneas, se mueve, a cada instante, con una velocidad igual a la resultante jeométrica de las primeras.

Recíprocamente: *un punto, animado de cierta velocidad, podrá siempre considerarse como animado de un número cualquiera de velocidades simultáneas con la condicion que éstas últimas tengan por resultante jeométrica, la velocidad dada.*

En el caso sencillo de un solo sistema de comparacion móvil se podrá decir tambien: *la velocidad del movimiento absoluto de un punto móvil es, a cada instante, la resultante jeométrica de su velocidad relativa i de su velocidad de arrastre;* i por consiguiente tambien: *la velocidad relativa de un punto móvil es la resultante jeométrica de su velocidad absoluta i de una velocidad igual i de sentido contrario a su velocidad de arrastre.*

Se debe tener siempre presente que la velocidad de arrastre de un punto es la velocidad del punto, ligado invariablemente al sistema de comparacion i en coincidencia, en el momento t, con el punto móvil considerado.

PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA DEL MOVIMIENTO INICIAL DE UN PUNTO MATERIAL I DE LAS ACCIONES SIMULTÁNEAS DE UN NÚMERO CUALQUIERA DE IMPULSIONES. (Galileo.)

Se observa siempre que, sobre un buque animado de una traslacion recta i uniforme, los movimientos de los cuerpos i

las acciones de las impulsiones sobre ellos, son exactamente los mismos que los que se observan en tierra firme.

Se puede por consiguiente admitir, como un principio deducido de la esperiencia, que las acciones de las impulsiones sobre los puntos materiales son las mismas, cuando los puntos i las impulsiones son referidos a un sistema de comparacion fijo en el espacio, o a un sistema de comparacion animado de una traslacion recta i uniforme.

Para comprender claramente este principio, se debe considerar la impulsion como enjendrada por cierto cuerpo activo, en contacto con el punto material i móvil con este punto.

Sea un punto material animado, en el momento t, de una velocidad v i dI la impulsion que recibe durante el tiempo dt. Consideremos un sistema de comparacion animado, en el momento t, de una traslacion recta i uniforme de velocidad v; respecto a este sistema, el punto i el cuerpo activo que obra sobre él, estan en reposo relativo en el momento t; sea dw la velocidad relativa que la impulsion dI imprime al punto, esta velocidad dw, segun el principio admitido, es la misma que la que hubiera adquirido el punto si este i el cuerpo activo hubieran estado en reposo absoluto, en el momento t. Así el punto material será animado en el momento $t+dt$, de una velocidad v de arrastre i de una velocidad relativa dw; su velocidad v' en el espacio será, por consiguiente

$$\overline{v'}=\overline{v}+\overline{dw}$$

Si una nueva impulsion viene a obrar, en seguida, sobre el punto material, la nueva velocidad que tomará el punto será la resultante de v' i de la velocidad infinitamente pequeña que la segunda impulsion hubiera dado al punto en el reposo, i así en seguida.

Sean ahora dI_1, dI_2, ... dI_n, n impulsiones elementales que obran simultáneamente sobre un punto material, animado de una velocidad v i dv_1, dv_2 .... dv_n, las velocidades infinitamente pequeñas que cada una de ellas, le hubiera dado, si obrara sola sobre el punto al reposo; se admite, como principio, que cada una de las n impulsiones simultáneas obra sobre el punto material como si estuviera sola. Segun esto, el punto es-

tará animado, en el momento $t+dt$, de $n+1$ velocidades simultáneas; su velocidad resultante v' será por consiguiente

$$\overline{v'}=\overline{v}+\overline{dv}_1+\overline{dv}_2+\ldots+\overline{dv}_n$$

Las n velocidades simultáneas infinitamente pequeñas pueden reemplazarse por una velocidad resultante dw tal que

$$\overline{aw}=\overline{dv}_1+\overline{dv}_2+\ldots+\overline{dv}_n$$

Sea dI la impulsion elemental que hubiera dado al punto considerado una velocidad dw; se dice que dI es la impulsion resultante de dI_1, $dI_2 \ldots dI_n$.

MEDIDA DE LA IMPULSION ELEMENTAL

Se dice que dos impulsiones elementales son iguales cuando dan separadamente a un mismo punto material una misma velocidad i que la reunion de n impulsiones elementales, iguales en magnitud, direccion i sentido, e simultáneas equivale a una impulsion única n veces mas grande.

1.ª PROPOSICION. *Las impulsiones elementales son entre sí como las velocidades que ellas imprimen separadamente a un mismo punto material.*

En efecto, sea dI una impulsion elemental que imprime a un punto material una velocidad dv, n impulsiones simultáneas iguales a dI darán, al mismo punto, una velocidad que será la resultante jeométrica de n velocidades simultáneas iguales en magnitud, direccion i sentido a dv, es decir una velocidad $n\,dv$. Por otra parte, las n impulsiones simultáneas iguales a dI equivalen a una impulsion $n\,dI$; luego la impulsion elemental $n\,dI$ da, al punto, una velocidad ndv. Lo que demuestra la proposicion.

Definicion de la masa

Una misma impulsion da jeneralmente velocidades diferentes a puntos materiales diferentes; esto proviene de que estos

puntos pueden contener cantidades distintas de materia i que esta materia puede ser tambien diversa en unos i otros. De aquí la necesidad de considerar un elemento que caracteriza cada punto; este elemento se llama *masa*.

Se dice que dos puntos tienen la misma masa cuando una misma impulsion elemental da, a cada uno, la misma velocidad i que la reunion de n puntos materiales de la misma masa equivale a un punto material de masa n veces mas grande.

2.ª PROPOSICION. *Cuando dos puntos materiales, sometidos cada uno a una impulsion elemental, toman la misma velocidad, las impulsiones son entre sí como las masas de los puntos.*

Consideremos, en efecto, n puntos materiales, de la misma masa m, en el reposo i sometamos, en el mismo momento, cada uno de estos puntos a una impulsion elemental dI, la misma para todos en magnitud, direccion i sentido; los n puntos tomarán todos el mismo movimiento i se moverán como un punto único de masa $n\,m$.

El conjunto de las n impulsiones equivale a una impulsion n veces mas grande; luego el punto de masa $n\,m$, sometido a la impulsion $n\,d\,I$, toma la misma velocidad que un punto de masa m sometido a la impulsion $d\,I$. Lo que demuestra la proposicion.

Cantidad de movimiento

Cuando un punto de masa m tiene una velocidad v, se dice que su cantidad de movimiento es el producto $m\,v$. Esta cantidad de movimiento se representa, como la velocidad, por medio de un vector, de lonjitud $m\ v$ i misma direccion i sentido que v.

3.ª PROPOSICION. *La impulsion elemental tiene por medida la cantidad de movimiento que ella imprime a un punto material en el reposo.*

Sea, en efecto, $d\,I$ una impulsion que obra sobre un punto material de masa m i le da una velocidad dv; $d\,I'$ otra impulpulsion que obra sobre otro punto, de masa m' i le da una velocidad dv'; en fin $d\,I''$ una tercera impulsion que, obrando sobre

el punto de masa m, le da una velocidad dv'. De las dos proposiciones anteriores, se deduce

$$\frac{d\,I}{d\,I''}=\frac{dv}{dv'}$$

$$\frac{d\,I''}{d\,I'}=\frac{m}{m'}$$

Luego, si se multiplican, miembro a miembro, estas dos igualdades:

$$\frac{d\,I}{d\,I'}=\frac{m\,dv}{m'dv'}$$

Para medir una cantidad cualquiera se debe definir la unidad correspondiente; adoptaremos, como *unidad de impulsion, la que da, a la unidad de masa, la unidad de velocidad.* Segun esto, si, en la fórmula precedente, se supone $m'=1$, $dv'=1$, se deberá hacer tambien $d\,I'=1$; quedará, por consiguiente,

$$d\,I=mdv$$

El producto mdv es precisamente la cantidad de movimiento infinitamente pequeña que la impulsion $d\,I$ imprime al punto material de masa m, primitivamente en reposo. La proposicion está, por consiguiente, demostrada.

4.ª PROPOSICION. *Cuando un punto material en movimiento tiene una cantidad de movimiento m v i recibe una impulsion elemental d I, la cantidad de movimiento resultante, despues de la impulsion, es la resultante jeométrica de m v i de d I.*

Sea, en efecto, dw la velocidad que la impulsion $d\,I$ imprimiria al punto si este estuviese en reposo i v' la velocidad resultante despues de la impulsion; se tiene

$$\overline{v'}=\overline{v}+\overline{dw}$$

luego tambien

$$\overline{mv'}=\overline{mv}+\overline{mdw}$$

Esta segunda relacion se puede deducir de la primera, porque las velocidades tienen la misma direccion i el mismo sentido que las cantidades de movimiento correspondientes.

Ahora *mdw* es precisamente la medida de dI, luego

$$\overline{mv'} = \overline{mv} + \overline{dI}$$

Lo que demuestra la proposicion.

5.ª PROPOSICION. *Un número cualquiera de impulsiones elementales que obran simultáneamente sobre un punto material, pueden reemplazarse por una impulsion única, resultante jeométrica de las primeras.*

Sean, en efecto, dI_1, dI_2,.... dI_n, las n impulsiones simultáneas; dv_1; dv_2,...., dv_n, las velocidades que, cada una, imprimiria separadamente al punto material en el reposo; dw la resultante de las n velocidades i dI la impulsion capaz de dar, al mismo punto, en reposo, la velocidad dw; dI es la resultante buscada.

Se tiene ahora

$$\overline{dw} = \overline{dv_1} + \overline{dv_2} + \ldots\ldots + \overline{dv_n}.$$

Sea m la masa del punto, se tendrá tambien

$$\overline{mdw} = \overline{mdv_1} + \overline{mdv_2} + \ldots\ldots + \overline{mdv_n}.$$

Cada término de esta relacion es precisamente la medida de la impulsion correspondiente; se tiene, por consiguiente,

$$\overline{dI} = \overline{dI_1} + \overline{dI_2} + \ldots\ldots + \overline{dI_n}$$

Lo que demuestra la proposicion.

De ahí se deduce un teorema análogo para las fuerzas; estas tienen, en efecto, la misma direccion i el mismo sentido que las impulsiones elementales correspondientes i su magnitud es igual

al cociente de la impulsion elemental por el elemento correspondiente del tiempo; se deduce de la relacion precedente

$$\frac{\overline{dI}}{dt}=\frac{\overline{dI_1}}{dt}+\frac{\overline{dI_2}}{dt}+\ldots+\frac{\overline{dI_n}}{dt}$$

Luego tambien

$$\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\ldots+\overline{F_n}\,.$$

Así, un número cualquiera de fuerzas simultáneas que obran sobre un mismo punto material, pueden reemplazarse por una fuerza única, resultante jeométrica de las primeras.

Recíprocamente, una impulsion dI o una fuerza F podrán ser reemplazadas por un número cualquiera de impulsiones o de fuerzas simultáneas, con la condicion que estas últimas tengan por resultante jeométrica dI o F.

PRINCIPIO DE LA IGUALDAD DE LA ACCION I DE LA REACCION. (Newton)

Cuando se lanza una piedra con la mano, se siente, durante el contacto, una reaccion de la piedra contra la mano i esta reaccion es tanto mas grande cuanto mas grande es la impulsion dada por la mano; se admite que esta reaccion es igual a la accion.

Para dar una forma mas precisa al enunciado de este principio, se considera el caso de un punto material que recibe una impulsion elemental; esta impulsion emana de cierto cuerpo activo i puede representarse, como lo hemos esplicado mas arriba, por un vector, cuyo punto de aplicacion es el punto material. Se llama *línea de accion* del vector la recta indefinida sobre la cual está situado este vector.

El principio de Newtor se espresa entonces de la manera siguiente: *cuando un punto material recibe de otro cuerpo una impulsion elemental, este punto reacciona contra el cuerpo i le imprime una impulsion elemental igual, situada sobre la misma línea de accion i de sentido contrario a la que ha recibido.*

CAPÍTULO II

DEL MOVIMIENTO RECTO DE LOS PUNTOS MATERIALES
APLICACION AL MOVIMIENTO VERTICAL DE LOS CUERPOS PESADOS
UNIDADES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

TEOREMA.—*Para que el movimiento de un punto material, sometido a una fuerza, sea recto, es necesario que la fuerza tenga siempre la misma direccion que la velocidad del punto.*

Sean, en efecto, m la masa del punto material; F la fuerza; v i $v+dv$ las velocidades del punto en los momentos t i $t+dt$; estas velocidades tienen, por hipótesis, la misma direccion: la de la recta sobre la cual se mueve el punto.

En el momento t, el punto material, sometido a la fuerza F, recibe una impulsion elemental Fdt, de misma direccion que F; esta impulsion imprime al punto una velocidad infinitamente pequeña dw, de misma direccion tambien que F, i tal que,

$$m\,dw = F\,dt$$

En fin, la velocidad $v+dv$, en el momento $t+dt$, es la resultante jeométrica de v i de dw. Como v i $v+dv$ tienen la misma direccion, dw debe tener tambien la misma direccion i ser igual a dv, luego la fuerza F tiene la misma direccion que la trayectoria del punto; ademas se tiene

$$m\,dv = F\,dt$$

Recíprocamente; si la fuerza que obra sobre un punto material tiene siempre la misma direccion que la velocidad del punto, éste se mueve en línea recta.

En efecto, a un momento cualquiera t, el punto material recibe una impulsion elemental Fdt de misma direccion que la velocidad v; la velocidad resultante en el momento $t+dt$, tiene, por consiguiente, la misma direccion que v. En resúmen, la ve-

locidad del punto conserva siempre la misma direccion i su trayectoria es, por consiguiente, recta.

En jeneral, para determinar el movimiento de un punto material, sometido a la accion de una fuerza, se debe conocer, a cierto momento inicial, la posicion i la velocidad del punto. En el caso de una fuerza, de direccion constante, el movimiento del punto será recto si su velocidad inicial tiene la misma direccion que la fuerza. Es una consecuencia del teorema anterior. El movimiento será tambien recto si la velocidad inicial es igual a cero, pues, en este caso, el movimiento inicial del punto tiene, por definicion, la direccion de la fuerza; luego, la velocidad inicial nula equivale a una velocidad infinitamente pequeña de la misma direccion que la fuerza.

DE LA ACELERACION EN EL MOVIMIENTO RECTO

Cuando un punto material es sometido a una fuerza, su velocidad varia con el tiempo; sean v i $v+\Delta v$ las velocidades en los momentos t i $t+dt$; cuando dt tiende hácia cero, Δv tiende tambien hácia cero i la razon $\frac{\Delta v}{dt}$ hácia un límite perfectamente determinado; este límite se llama *aceleracion;* sea, pues, γ la aceleracion; se tiene

$$\gamma = \lim. \frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

La variacion de velocidad dv puede reemplazar Δv, lo que equivale a decir que, durante el tiempo dt, se puede considerar la variacion de velocidad como proporcional al tiempo o la aceleracion como constante.

Si la aceleracion γ queda siempre constante, se tiene

$$v = \gamma\, t + \text{const.}$$

En este caso, la velocidad varia uniformemente con el tiempo; se dice que el movimiento del punto es *uniforme-*

mente variado. La *aceleracion* γ *representa entónces la variacion constante de la velocidad durante la unidad de tiempo.*

En el caso jeneral, el movimiento del punto puede ser considerado, a cada momento t, como uniformemente variado durante el intervalo de tiempo dt; la aceleracion de este movimiento infinitamente pequeño representa entónces la aceleracion del punto en el momento t.

MEDIDA DE LA FUERZA

Se ha obtenido mas arriba la fórmula

$$m\,dv = F\,dt$$

Luego

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\,\gamma$$

Esta relacion permite evaluar la fuerza F cuando se conoce la aceleracion γ del movimiento de un punto material de masa m, o inversamente, calcular la aceleracion cuando se conoce la fuerza.

Se ve que la medida de la fuerza que imprime a un punto material de masa m, una aceleracion γ es igual al producto $m\,\gamma$.

Esta medida es una consecuencia de la que se ha obtenido para la impulsion; en efecto, sea dI la impulsion elemental que obra sobre el punto en el momento t,
se tiene

$$d\,I = m\,dv$$

luego

$$I = mv + \text{Const.}$$

i, por consiguiente,

$$F = \frac{d\,I}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\gamma$$

es la misma fórmula que la anterior.

Como la velocidad infinitamente pequeña dv tiene la misma direccion i el mismo sentido que la impulsion Fdt, la aceleracion $\frac{dv}{dt}$ tiene tambien la misma direccion i el mismo sentido que la fuerza F.

Cuando la masa es igual a la unidad, se tiene

$$F=\gamma$$

luego, se puede decir, que *la aceleracion tiene la misma medida que la fuerza, cuando la masa del punto material es igual a la unidad.*

DEL MOVIMIENTO RECTO UNIFORMEMENTE VARIADO

En este movimiento la aceleracion es constante; sea γ su valor. Sean tambien, en el momento t, v la velocidad del punto móvil i Δ su distancia a cierto punto fijo i arbitrario de la trayectoria; en fin v_0 i s_0 las cantidades análogas a v i s que se refieren al oríjen del tiempo

Se tiene en primer lugar

$$\frac{dv}{dt}=\gamma$$

luego

$$v=v_0+\gamma t$$

Por otra parte, v es igual a $\frac{ds}{dt}$, luego

$$\frac{ds}{dt}=v_0+\gamma t$$

(1) $$s=s_0+v_0 t+\tfrac{1}{2}\gamma t^2$$

Se adopta jeneralmente, para las distancias s, cierto sentido arbitrario como sentido positivo; por otra parte, los sentidos de

v_0 i γ son conocidos de antemano, luego los signos de estas dos cantidades son determinados una vez que se ha elejido el sentido de los s positivos.

La ecuacion (1) se llama *ecuacion del movimiento;* luego, en el caso del movimiento uniformemente variado, la ecuacion del movimiento tiene la forma jeneral

$$(2) \qquad s = A + B\,t + C\,t^2$$

A, B i C son tres constantes. Esta forma de la ecuacion del movimiento es *característica* del movimiento uniformemente variado.

Se averigua en efecto con (2) que la velocidad varia proporcionalmente al tiempo, i que la aceleracion es constante; en efecto:

$$v = \frac{ds}{dt} = B + 2\,C\,t$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = 2\,C.$$

Caso particular.—Supongamos que, al oríjen del tiempo, el punto móvil esté en coincidencia con el punto fijo desde el cual se cuentan las distancias s $(s_0 = o)$ i que su velocidad, en este momento, sea nula $(v_0 = o)$ se tendrá simplemente

$$v = \gamma\,t$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,\gamma\,t^2$$

Estas fórmulas pueden aplicarse al movimiento infinitamente pequeño que una fuerza cualquiera F comunica a un punto de masa m durante el tiempo infinitamente pequeño dt; se sabe, en efecto, que, durante este tiempo, se puede considerar la fuerza F como constante en magnitud, direccion i sentido i que, ademas, esta fuerza obra sobre el punto como si éste estuviera en reposo; representemos entónces por Δv i Δs los valores de

v i s que corresponden a un valor infinitamente pequeño dt del tiempo, i reemplacemos γ por $\frac{F}{m}$, tendremos

$$\Delta v = \frac{F}{m} dt$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} dt^2$$

La primera fórmula muestra que Δv es del mismo órden de pequeñez que dt, ademas se averigua que la cantidad de movimiento infinitamente pequeña $m\Delta v$ es precisamente igual a la impulsion elemental Fdt; la segunda fórmula muestra que Δs es de segundo órden de pequeñez respecto a dt; por consiguiente se puede decir que un punto material al reposo, sometido a una impulsion elemental, toma una velocidad infinitamente pequeña del mismo órden que la impulsion; pero no alcanza a moverse durante el tiempo en que obra la impulsion.

APLICACION A LA PESANTEZ

La observacion muestra que los cuerpos, en su caida vertical, en el vacío, tienen todos un movimiento de conjunto uniformemente variado, cuya aceleracion constante es igual a $9^m,8$ por segundo.

Este resultado se averigua, cualesquiera que sean la forma, las dimensiones i la naturaleza del cuerpo considerado. Podemos decir, por consiguiente: cuando un punto material pesado se mueve verticalmente, su movimiento es uniformemente variado i su velocidad varia uniformemente de $9^m,8$ por segundo. Esto es el resultado de la observacion.

La aceleracion de este movimiento se representa jeneralmente con la letra g i se llama *gravedad*.

El valor de g puede considerarse como constante en un mismo punto de la tierra (en todo caso sus variaciones son tan pequeñas que no se pueden medir); miéntras tanto su valor varia entre $9^m,78$ hasta $9^m,83$, desde el ecuador hasta el polo.

En jeneral, para calcular el valor de g en un lugar cualquiera de la tierra, de latitud λ, se ha obtenido la fórmula

$$g = 9^{m},8061 - 0^{m},0250 \cos 2\lambda$$

Sea lo que fuera, se deduce de la observacion de la caida de los cuerpos que, en un mismo lugar de la tierra, un punto material, de masa m, es sometido a una fuerza constante, dirijida desde arriba hácia abajo, i cuya medida es mg.

Como g varia de un lugar a otro, la fuerza mg que hace caer un mismo punto material hácia la tierra, es diferente segun el lugar en que se encuentra el punto. Es bien evidente, en efecto, que la masa m no puede cambiar.

Esto nos esplica por qué se ha elejido de preferencia una unidad de masa en vez de una unidad de fuerza; en efecto, la unidad de masa será la masa de cierto volúmen definido de un cuerpo definido; la masa del mismo volúmen de este cuerpo será la misma en todos los puntos de la tierra; mientras tanto, la fuerza que hará caer esta unidad de masa tendrá valores diferentes segun el lugar de la tierra en que se encontrará, puesto que su medida es precisamente igual, en este caso, a la gravedad g.

PROBLEMAS DIVERSOS

I. *Un punto material cae desde cierta altura h, sin velocidad inicial ¿cuál es la duracion de la caida i la velocidad del punto cuando llega al fin de su carrera?*

Las fórmulas jenerales del movimiento del punto son, en este caso

$$v = gt$$

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$

Estas permiten espresar v i t en funcion de s, luego, cuando $s = h$, se tiene

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

II. *Un punto material cae sin velocidad inicial ¿cuáles son los caminos descritos en las unidades sucesivas del tiempo?*

Reemplacemos, en el valor de s, el tiempo t por n i $n+1$ segundos i sean s_n, s_{n+1} los valores correspondientes de s se tiene

$$s_n = \tfrac{1}{2} g n^2$$

$$s_{n+1} = \tfrac{1}{2} g (n+1)^2$$

Luego

$$s_{n+1} - s_n = \tfrac{1}{2} g (2n+1)$$

Así los caminos recorridos sucesivamente, en cada unidad de tiempo, son entre sí como la sucesion de los números impares.

III. *Se lanza un punto material desde abajo hácia arriba con una velocidad inicial* v_0 *¿a qué altura llegará* h, *el punto, i en cuánto tiempo?*

Las fórmulas jenerales del movimiento son, en este caso

$$v = v_0 - gt$$

$$s = s_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Cuando el punto llega a la parte superior de su carrera, su velocidad es nula, luego el tiempo buscado de la subida satisface a la ecuacion

$$o = v_0 - gt$$

Segun esto

$$t = \frac{v_0}{g}$$

La segunda ecuacion da en seguida, cuando se reemplaza t por este valor

$$h = s - s_0 = \frac{v_0{}^2}{2g}$$

IV. *Dos puntos materiales caen sin velocidad inicial, uno en seguida de otro; la diferencia de los momentos de caida es mui pequeña e igual a θ ¿cuál será la distancia de los dos puntos cuando el primero haya caido de la altura h?* (Resal).

Sean s i s' los caminos recorridos por los dos puntos, despues que el primero haya caido durante el tiempo t, se tendrá

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

$$s'=\frac{1}{2}g(t-\theta)^2$$

Luego

$$s-s'=\frac{1}{2}g\theta\,(2\,t-\theta)$$

O, con suficiente aproximacion, puesto que θ es mui pequeño, por hipótesis:

$$s-s'=g\,\theta\,t$$

Sea ϵ la distancia de los dos puntos cuando el segundo principia a caer; se tiene

$$\epsilon=\frac{1}{2}g\,\theta^2$$

Si el momento t es el de la llegada del primer punto en la parte inferior de su carrera, se tiene

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

De aquí se deduce

$$s-s'=2\,\sqrt{h\,\epsilon}$$

Supongamos, por ejemplo, $h=400^{\text{m}}$, $\epsilon=0^{\text{m}},000.001$ se obtiene

$$s-s'=0^{\text{m}},04$$

Se concibe así porque, en las caidas de agua de gran altura, se observa abajo, no un chorro de agua, sino una especie de neblina, en medio de la cual se puede penetrar sin inconveniente. En efecto, las moléculas de agua, reunidas arriba se separan unas de otras a medida que van cayendo.

V. *Se deja caer una piedra en un pozo i se cuenta el tiempo que pasa entre el momento en que se suelta la piedra i el momento en que se oye el ruido de su caida en el fondo del pozo; se quiere saber cuál es la hondura del pozo.*

Sean x la hondura del pozo, t el tiempo observado, V la velocidad uniforme del sonido, g la gravedad. El tiempo t es la suma del tiempo t_1, empleado por la piedra para llegar al fondo del pozo, i del tiempo t_2 empleado por el sonido para recorrer la distancia x. Así

$$t=t_1+t_2$$

Por otra parte

$$t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

$$t_2=\frac{x}{V}$$

Luego

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{V}$$

Esta ecuacion permite despejar la incógnita x.

Para el cálculo práctico, se determina un ángulo auxiliar θ, por medio de la ecuacion

$$\text{sen}\ \theta=\frac{gt}{V+gt}$$

i se tiene

$$x=Vt\ tg\ \frac{\theta}{2}$$

INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA DEL AIRE SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS PESADOS

En los problemas considerados mas arriba, no se ha tomado en cuenta la resistencia del aire.

La lei matemática que espresa el efecto de esta resistencia sobre el movimiento de los cuerpos no es conocida. Se concibe que debe ser complicada, pues depende a la vez de la velocidad, de la forma i de la constitucion del cuerpo móvil considerado. Las esperiencias hechas a este respecto parecen indicar que la resistencia del aire equivale a una fuerza proporcional: 1.°, a la velocidad cuando esta es pequeña; 2.°, al cuadrado de la velocidad cuando esta queda menor que 200 metros al segundo; 3.°, al cubo de la velocidad cuando esta pasa de 200 metros. Todavía, estos resultados son solo aproximaciones.

Sea $f(v)$ la funcion que espresa la influencia del aire sobre el movimiento de un cuerpo animado de la velocidad v; si la funcion $f(v)$ puede desarrollarse en una serie converjente, ordenada segun las potencias de v, se podrá escribir

$$f(v) = A + Bv + Cv^2 + Dv^3 + \dots$$

Se concibe así que, para los valores pequeños de v, los términos en v^2, v^3...... pueden despreciarse, entónces la funcion $f(v)$ varia proporcionalmente a la velocidad. Para valores mas grandes de v, el término en v^2 pueden ser predominantes i los siguientes quedar despreciables, hasta cierto valor límite de v; la resistencia varia entónces como el cuadrado de la velocidad i así en seguida.

Para estudiar el movimiento vertical de los cuerpos pesados en el aire, se deben distinguir dos casos, segun el sentido del movimiento: 1.°, en el movimiento *descendente*, la gravedad tiene el sentido mismo del movimiento i la resistencia del aire un sentido opuesto; 2.°, en el movimiento *ascendente*, la gravedad i la resistencia del aire se oponen al movimiento, hasta que el cuerpo llega a la parte superior de su carrera; despues de este momento, el cuerpo baja de nuevo i la resistencia del aire cambia de sentido.

Supondremos la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad. Sea m la masa del punto material, v su velocidad en el momento t, g la gravedad; podremos representar la resistencia del aire por la espresion $mg\frac{v^2}{K^2}$ en la cual K es una constante.

I.º MOVIMIENTO DESCENDENTE

La ecuacion del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt}=mg-mg\frac{v^2}{K^2}$$

O bien

$$\frac{dv}{dt}=g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)$$

I, por consiguiente,

$$\frac{dv}{1-\frac{v^2}{K^2}}=g\,dt$$

La integracion da

$$\frac{K}{2}\,L\frac{K+v}{K-v}=gt+\text{const.}$$

Supongamos que $v=o$ cuando $t=o$, la constante de integracion es nula, i se obtiene

$$L\frac{K+v}{K-v}=\frac{2gt}{K}$$

Luego

$$v=K\frac{e^{\frac{2gt}{K}}-1}{e^{\frac{2gt}{K}}+1} \tag{4}$$

Calculemos ahora el camino recorrido s; tendremos

$$\frac{ds}{dt}=K\frac{e^{\frac{2gt}{K}}-1}{e^{\frac{2gt}{K}}+1}$$

Luego, si $s=o$ cuando $t=o$

$$(5)\qquad s=\frac{K^2}{g}\,L\left(\frac{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}}{2}\right)$$

Si el tiempo t aumenta indefinidamente, la velocidad v tiende hácia K, luego, el movimiento tiende hácia la uniformidad.

2.º MOVIMIENTO ASCENDENTE

La ecuacion del movimiento es entónces

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mg\frac{v^2}{K^2}$$

O bien

$$\frac{dv}{dt}=-g\left(1+\frac{v^2}{K^2}\right)$$

I, por consiguiente,

$$\frac{dv}{1+\frac{v^2}{K^2}}=-g\,dt$$

Sea v_0 la velocidad inicial, la integracion da

$$v=K\frac{v_0\cos\frac{gt}{K}-K\operatorname{sen}\frac{gt}{K}}{K\cos\frac{gt}{K}+v_0\operatorname{sen}\frac{gt}{K}}$$

Supongamos tambien que s es igual a cero en el momento inicial; una segunda integracion da

$$s=\frac{K^2}{g}L\left(\cos\frac{gt}{K}+\frac{v_0}{K}\operatorname{sen}\frac{gt}{K}\right)$$

El móvil llegará a la parte superior de su carrera cuando $v=o$; sea T el tiempo correspondiente, tendremos

$$tg\frac{gT}{K}=\frac{v_0}{K}$$

Sea tambien h la altura del punto en este momento, se tendrá

$$h=\frac{K^2}{g}L\frac{\sqrt{v_0^2+K^2}}{K} \tag{6}$$

PROBLEMA. *Un punto material es lanzado desde abajo hácia arriba con una velocidad inicial* v_0 *¿cuál es su velocidad* v_1 *cuando vuelve al punto de partida?*

Calcularemos la relacion que liga v i s en el movimiento *descendente.* Se deduce de (4) i (5) la relacion

$$\frac{v^2}{K^2}=1-e^{-\frac{2sg}{K^2}}$$

Si se reemplaza, en el segundo miembro, s por el valor (6) de h, el primer miembro dará v_1, luego

$$v_1=v_0\sqrt{\frac{K^2}{v_0^2+K^2}}$$

Se ve que la velocidad ha disminuido.

UNIDADES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

En la jeometría se demuestra que una sola *unidad fundamental*, la de lonjitud, basta para medir las lonjitudes, las superficies i los volúmenes.

Si L es la unidad de lonjitud, L^2 será la de superficie i L^3 la de volúmen. Se dice que L^2 i L^3 son unidades derivadas de la unidad fundamental L i que las *dimensiones* de una lonjitud, de una superficie i de un volúmen son respectivamente 1, 2, 3, respecto de la unidad fundamental L.

En la mecánica intervienen otras cantidades como el tiempo i la masa que no tienen evidentemente ninguna relacion con las lonjitudes; se consideran, entónces, *tres* unidades fundamentales *irreductibles:* la de lonjitud L, de tiempo T i de masa M.

Todas las demas cantidades de la mecánica se pueden medir cuando se han definido las tres unidades fundamentales.

Así, por ejemplo, una velocidad es el cociente de una lonjitud por un tiempo, luego si L i T son las unidades de lonjitud i de tiempo, la unidad *derivada* de velocidad será $\frac{L}{T}$ o LT^{-1}; se dice que las *dimensiones* de una velocidad son 1 i −1 respecto a las unidades de lonjitud i de tiempo.

Se puede así formar el cuadro siguiente de las unidades derivadas de las tres fundamentales i que se refieren a los diverversos elementos considerados hasta ahora:

Velocidad	$L\,T^{-1}$
Cantidad de movimiento e impulsion.	$M\,L\,T^{-1}$
Aceleracion	$L\,T^{-2}$
Fuerza..	$M\,L\,T^{-2}$

La consideracion de las *dimensiones* facilita la verificacion de las fórmulas; en efecto, una igualdad no puede existir sino entre cantidades que se pueden medir con la misma unidad; luego, para que una relacion sea exacta, se necesita que sus diversos términos tengan las mismas dimensiones. Ademas se pueden entrever ciertas relaciones entre diversas cantidades cuando sus

dimensiones son iguales; así, por ejemplo, el producto de una fuerza por una lonjitud tiene por dimensiones $M L^2 T^{-2}$ i se nota que esta espresion representa el producto de una masa por el cuadrado de una velocidad. Veremos precisamente mas tarde que existe una relacion mui importante entre estas dos cantidades.

UNIDAD DE LONJITUD

La unidad empleada jeneralmente en mecánica es el *metro* i sus multiplos o divisores decimales.

El metro es la lonjitud, a cero grado centígrado, de una regla de platina, llamada *mètre-etalon*, construida en 1799 por la Comision francesa *des poids et mesures* i colocada en el *Conservatoire des Arts et Metiers* de Paris. Esta lonjitud representa sensiblemente la cuarenta millonésima parte de un meridiano terrestre.

UNIDAD DE MASA

Es la masa de un centímetro cúbico de agua destilada a la temperatura de su máximo de densidad; es decir, la masa de un *gramo;* por este motivo se llama esta unídad *gramo-masa.* Existe en el *Conservatoire des Arts et Metiers* de Paris un *Kilogramme etalon* cuya masa sirve prácticamente de unidad i que equivale a 1,000 gramo-masa.

UNIDAD DE TIEMPO

La unidad adoptada es el segundo sexajesimal de tiempo medio; esta unidad es contenida 60 veces en el minuto, 3,600 veces en la hora i 86,400 veces en el dia medio de veinticuatro horas.

SISTEMA C. G. S.

Este sistema fué adoptado por el Congreso de los electricistas, reunido en Paris en 1881; las unidades fundamentales son el centímetro (C), el gramo-masa (G) i el segundo sexajesimal de tiempo medio (S).

En este sistema, la unidad de fuerza (dina) es la fuerza que

da, a la unidad de masa, una aceleracion de $1^{cm.}$ por segundo; segun esto, la fuerza que hace caer la unidad de masa, en un lugar cualquiera de la Tierra, contiene un número de dinas igual al número de centímetros contenidos en la gravedad g, es decir, 980 dinas.

A. OBRECHT

(Continuará)

